Végetlen foglalkozás

Avagy a játékosság megtérül

Dr. Kosztolányiné Nagy Erzsébet 2018. RLV

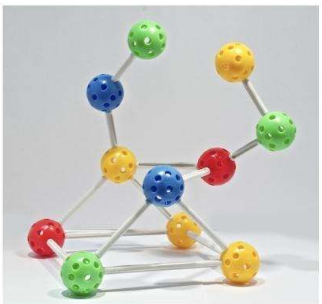
A szeminárium célja egyrészt annak tudatosítása, hogy a problémamegoldó gondolkodás képessége egy adott szituációban, illetve pillanatban nagymértékben függ attól, milyen kihívásokkal nézett szembe korábban a tanuló, milyen ötletekkel ismerkedett meg, másrészt annak a hangsúlyozása, hogy a feladatok, kérdések megoldása nem pusztán valaminek a végét, hanem sok esetben egy új gondolatkörnek a kezdetét jelentik. Erre utal a címben szereplő „végetlen" jelző. (Akár a „végtelen", akár a „se eleje, se vége" címek ijesztőbben hangozhattak volna a hallgatóság számára.)

A gyakorlásra, készségfejlesztésre szánt konkrét feladatsorok ma már korosztály szerint is, téma szerint is számtalan szakirodalomban fellelhetők legyen az nyomtatott vagy internetes. Emellett akár feladatsor-készítő programokkal is színesebbé tehetjük az órákat, biztonságosabbá, élvezetesebbé a készségek fejlesztését. Ugyanakkor akár rutinfeladatokról, akár több ötletet igénylő feladatról van szó, mindenképpen hangsúlyosnak tartom a kollégák közötti kommunikáció inspiráló és szükséges voltát. Ezen a fórumon is kiemelném, hogy egymást segítve, egymás örömének örülve lényegesen eredményesebben tudunk dolgozni.

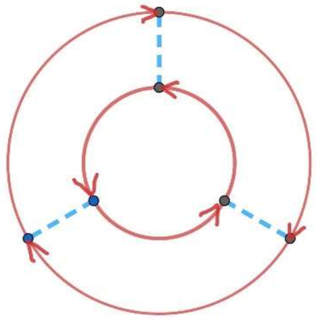
Lássunk néhány példát olyan helyzetekre, amelyekben a játék komoly matematikai tartalmakat rejt! Többnyire nem pusztán maga az eszköz, hanem az irányított játék, amit a tanár – lényegesen mélyebb matematikai ismeretei révén – tudatosan alakít szabályaival, kérdéseivel. A lehetőségek (egy részének) ismeretével mederben tudja tartani a tanulók ötleteit, felmerülő kérdéseit. Azért írok csak részismeretekről, mert a matematikában szinte akármilyen feladattal kapcsolatban tovább-kérdezünk, máris könnyen nyitott kérdéssel is szemben találhatjuk magunkat…

Egy játék a régmúltból (a saját régmúltamból)

Mivel ezt a játékot egy korábbi (1997. Eger) vándorgyűlésen már részletesebben körül jártam egy akkor tartott szemináriumon, így erről itt csak vázlatosan szeretnék írni. Dienes Zoltán professzor a szimmetriacsoportok fogalmát egyszerű, kézzel fogható forgatásokon keresztül látta eredményesnek bevezetni. Háromszögek, négyzetek, kockák könnyű szerrel építhetők pl. a régről ismert Babilon-készlet golyóinak, pálcikáinak segítségével.



Ezen alakzatok egyes állapotait már akár az általános iskolás gyerekek is képesek egye-egy egyszerű rajz segítségével rögzíteni. Azt pedig – közös megegyezés alapján - szintén tudjuk jelölni a rajzon, hogy milyen transzformációkat használtunk fel arra, hogy egyik állapotból a másikba kerüljenek ezek az alakzatok. Amikor arra törekszünk a tanulókkal, hogy megtaláljuk a lehető legkevesebb olyan transzformációt, amelyek kellő számú ismétlésével (és alkalmas sorrendjével) az összes rögzített állapothoz el tudunk jutni, akkor egy-egy ciklikus csoport generátorelemének megkeresését hajtjuk végre. (Természetesen anélkül, hogy ezekkel a fogalmakkal ijesztgetnénk a gyerekeket…) Az ábrán például a szabályos háromszög szimmetriacsoportját szemléltethetjük. A háromszög minden csúcsa más színű, így az állapotok jól követhetők. Abban állapodtunk meg a gyerekekkel, hogy a nyíl jelentse a háromszög középpontja körüli 120°-os elforgatást, a szaggatott vonal pedig a „függőleges" tengelyre való tükrözést. Ez a két transzformáció elegendőnek bizonyult ahhoz, hogy a háromszög akár melyik állapotból akármelyik másik állapotba átvihető legyen.



Az ábra természetesen nem az első pillanattól ilyen egyértelmű és tiszta. Hosszabb-rövidebb próbálkozás után alakul ki ez az átlátható szerkezet. Utána viszont már a megalkotott modellen is megfogalmazhatunk feladatokat. Pl.: Legkevesebb hány „lépéssel" (egységnyi transzformációval) juthatunk el egyik állapotból a másikba? vagy Egy előre megadott utat (nyíl és szaggatott vonal sorozatot milyen szabályszerűségek segítségével tudunk leegyszerűsíteni és a lehető legrövidebbé tenni? (Például: két szaggatott vonal egymás után olyan, mintha semmit nem is csináltunk volna, azaz a tengelyes tükrözés kétszeri végrehajtásával az identitáshoz jutunk…)

Volt olyan ötödik osztályos csoport, akikkel egy ilyen modellalkotás és abban való biztonságos közlekedés után könnyedén fel tudtuk vázolni a modulo 4 maradékosztályok additív csoportját. (Ezt természetesen a 4-gyel osztva 0, 1, 2, 3 maradékot adó számok összeadó táblázatának és térképének neveztük.) A modellek közötti analógiát pedig teljesen magától értetődőnek tartották a gyerekek.

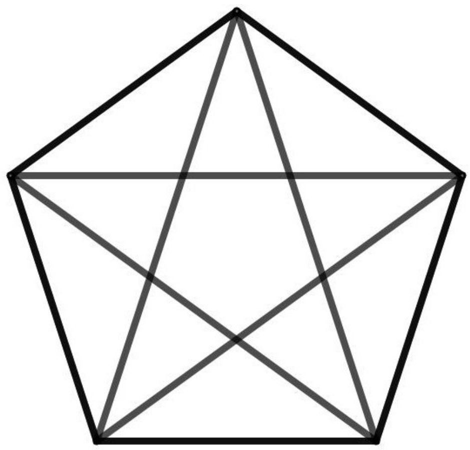
A lottó tanulságai

A középiskolai tanárságom kombinatorika-oktatásának egy tapasztalatát szeretném itt megosztani. Az ötös lottóval kapcsolatos feladatok megoldása, feldolgozása évről évre egyre nagyobb kihívást jelent az új generációknak. Ennek okául egyrészt természetesen az is megjelölhető, hogy ma már ez csak egy a tengernyi fajta szerencsejáték közül, így sokkal kevésbé van fókuszban, mint pár évtizeddel ezelőtt. Másrészt az a tapasztalatom, hogy egy kicsit a nagy számok zavaróak a tanulók számára (a 90 szám közül való választás), de még inkább az kuszálja össze a gondolkodást, hogy éppúgy 5 nyertes szám van, mint ahogy 5-öt is kell megjelölni egy játékszelvényen. Sokszor ez sem okozna gondot addig, amíg a hipergeometrikus eloszlás képletét fel nem akarjuk írni. Ehhez meg kell tudniuk különböztetni ezt a két paramétert egymástól. Erre – és egyben a lottóval kapcsolatos feladatok előkészítésére is – üdvösnek tartanám, ha lennének ezzel kapcsolatos leszámolási feladatok is előzményként általános iskolában. Természetesen sokkal kisebb számokkal, és ha egy mód van rá, akkor a paraméterek egyesével való változtatgatásokkal. A hipergeometrikus eloszlás képlete ugyanis – neve ellenére – könnyen birtokba vehető tudás, ha értjük azt, ami meg van fogalmazva benne.

Szabályos ötszög – Kérdezzünk!

Igen gyakran – talán a könnyebb ellenőrizhetőség végett- zárt végű feladatokat adunk tanítványainknak. Emellett sokkal nagyobb hangsúlyt kellene fektetnünk a nyílt végű feladatokra. Erre szeretnék itt egy példát mutatni. Ez az adott témakörben is csak egyetlen nagyon speciálisan tálalt „probléma". Célja, hogy bátran tétessünk fel kérdéseket tanulóinkkal olyankor is, amikor nem tudjuk, mi a cél, ahová el akarunk jutni. Ez a fajta kérdésfelvetés, kutakodás sokkal inkább hasonlít arra, hogy az igazi tudósok dolgoznak…

Induljunk ki az átlóival feldarabolt szabályos ötszögből! Tegyünk fel kérdéseket!



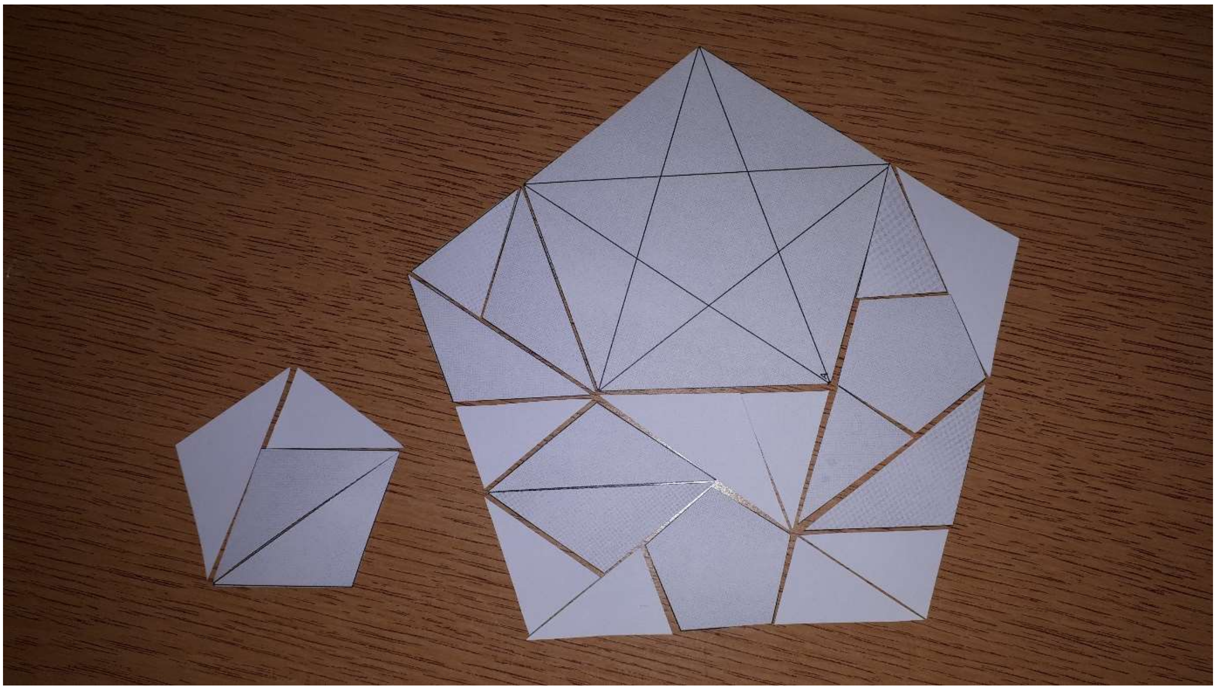
Természetesen a kérdések témája, mélysége nagymértékben függ a kérdező előképzettségétől. Lehet, hogy valaki azt kérdezi meg, hány „különböző" darabra vágtuk szét az ötszöget, más pedig akár az aranymetszés témakörét érintő kérdéseket is feszegethet. Szóba kerülhetnek szimmetriák, szögek, szögpárok, átlók száma, forgásszimmetria, hasonlóság, Fibonacci-sorozat, stb.

Egy lehetőség pl., hogy a szabályos ötszög átlóit berajzolva a keletkező egyenes szakaszok mindegyike mentén felvágtam az ötszöget. Pontosabban ezt három darab egybevágó ötszöggel csináltam meg és az így keletkező darabokat beletettem egy borítékba. Ezzel összeállt egy készlet. Ezt a készletet kapta meg egy-egy ember, illetve egy-egy csoport.

Az én első kérdésem az volt, kirakható-e egy kétszer akkora területű szabályos ötszög a darabokból? Rövid próbálkozás, majd fejtörés után rá kellett jönnöm, hogy nem. Ugyanis ha a terület kétszeres, akkor a hasonlóság miatt az oldalának $\sqrt{2}$-szeresnek kellene lennie. Az pedig (és itt nyilván használtam az általam ismert aranymetszésre vonatkozó információkat) a szabályos ötszög ezen adatai között nem fordulhat elő.

Megjegyzés (Cofman Judit tanulói kutatásai alapján): Érdemes kutatási feladatként végig követni, hogy ha az ábrán látható legkisebb szakaszt eljelöljük *a*-val, a következő legrövidebbet *b*-vel, akkor ezek segítségével hogyan állítható elő a következő szakaszhossz, majd ha meghosszabbítjuk a nagy ötszög oldalait, és az így keletkezett csillagötszög csúcsait is összekötjük, akkor kétféle újabb hosszúságú szakasz keletkezik. Fejezzük ki ezek hosszát is az *a* és a b segítségével! Majd folytassuk az eljárást! Mit veszünk észre? Mit kapunk akkor, ha ugyanígy „befelé” folytatjuk az ábrát? (Itt már felmerül a fraktálok fogalma is.)

Térjünk vissza a „készlethez”. Ha már kétszeres területű ötszög nem készíthető a darabokból, egyáltalán valamilyen más méretű ötszög készíthető-e belőlük? Meglepő választ szemléltet az alábbi fotó:



E szerint az ábra szerint a három egybevágó szabályos ötszögből egyszerre két, az eredetihez hasonló ötszög is összerakható. A megjegyzésben bevezetett jelöléssel a kicsinek az oldalhossza b, a nagyé pedig $a + 2b$. (Ezekkel a szakaszokkal kifejezve az eredeti ötszög oldalhossza: $a + b$. Az ábrán jól látható, hogy „csaltam”, és az egyik eredeti ötszöget nem is daraboltam fel…) Ha itt egy kicsit középiskolás ismeretekre is támaszkodhatunk, akkor felhasználhatjuk azt az összefüggést, hogy a hasonló síkidomok területének aránya egyenlő a hasonlóság arányának (az oldalhosszak arányának) négyzetével. Így felírható a területek egyenlősége alapján az alábbi egyenlőség:

$$b^2 + (a + 2b)^2 = 3(a + b)^2$$

Rendezzük az egyenletet!

$$b^2 + a^2 + 4ab + 4b^2 = 3(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$0 = a^2 + ab - b^2$$

Ahonnan a pozitív megoldás az a és a b oldal arányára: $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Vagyis a területek egyenlőségéből is kiszámítható az aranymetszés aránya.

Természetesen más kérdések feltételével egészen más irányt vehetnének „kutatásaink”.

Sorozatok vagy cérnakép?

Ebben a részben egy lehetséges példát szeretnék bemutatni arra, hogyan készíthető elő a matematika egy fontos kérdése egyszerű (és egyszerűen tárgyalható) feladatokból álló feladatsor segítségével.

- Meg tudunk-e adni olyan egész számokból álló számtani sorozatot, amely tartalmazza az összes pozitív egész számot?
  A válasz triviális: az első tag és a differencia is legyen 1.
- Meg tudunk-e adni olyan egész számokból álló számtani sorozatokat, amelyek tartalmazzák az összes pozitív egész számot, ha az 1 differenciát nem engedjük meg?
  Ilyet sem nehéz találni: pl. két 2 differenciájú számtani sorozat, az egyik a páros, a másik a páratlan számokat tartalmazza. Ennek mintájára három darab 3 differenciájú vagy négy darab 4 differenciájú, stb. sorozat is alkalmas.
- Meg tudunk-e adni olyan egész számokból álló számtani sorozatokat, amelyek tartalmazzák az összes pozitív egész számot, ha az 1 differenciát nem engedjük meg és nem minden differencia egyenlő?
  Erre jó példa lehet egy 2 differenciájú számtani sorozat, ami a páratlan számokat tartalmazza és két 4 differenciájú számtani sorozat, ami a 4-gyel osztva 2, illetve 0 maradékú számokat tartalmazza (azaz összességében a páros számokat). Ez a megoldás is tartalmazza azt a gondolatot, hogy tetszőlegesen sok számtani sorozatot is meg tudnánk adni a kívánt feltételekkel. (Pl. a differenciák: 2, 4, 8, …., 2^{n-1}, 2^n, 2^n.)
- Lehet-e minden differencia különböző?
  Zavarba ejtően más gondolkodást igényel a megoldás megtalálása. Ugyanakkor, ha elengedjük az eddigi struktúrához való ragaszkodást, akkor ez sem bizonyul nehéz feladatnak. Készíthetünk hozzá egy kis táblázatot, amely tartalmazza a páronként különböző differenciákat (*d*) és a hozzájuk tartozó sorozatok alkalmas első tagját (*a*).

d	*a*
2	1
3	0
4	2
6	4
12	8

Természetesen ez csak egyetlen példa a legegyszerűbbek közül. Itt is fölvetődhet a kérdés, hogy tudjuk-e tetszőlegesen sok sorozattá növelni a rendszerünket az adott feltételekkel. Ehhez elegendő belátnunk például azt, hogy a 12-vel osztva 8 maradékot adó számok egy olyan számtani sorozatot alkotnak, amelyben a differencia 12, azaz 12-esével ugrálunk a legelső kérdésünk egyesével való ugrálása helyett. Tehát helyettesíthető egy olyan rendszerrel, ami az előbb megalkotott rendszerünknek a „12-szeres nagyítása”.

d	*a*
2	1
3	0
4	2
6	4
24	8
36	32
48	20
72	44
144	92

Ez a „nagyítási” lehetőség az utolsó számtani sorozat helyettesítésére mindig rendelkezésünkre áll, így itt is tetszőlegesen nagy lehet a sorozatok száma.

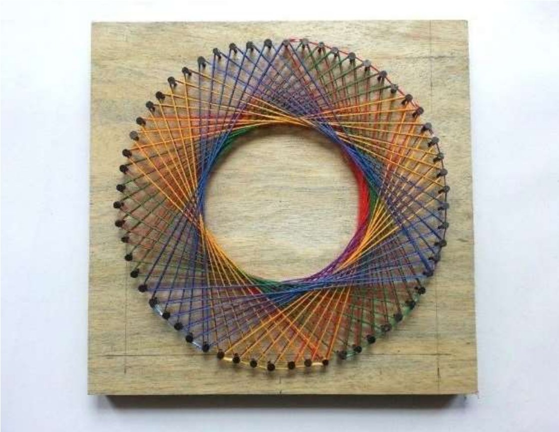
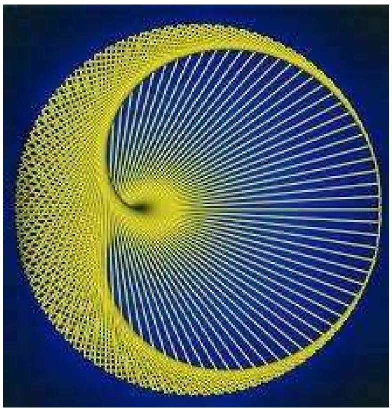
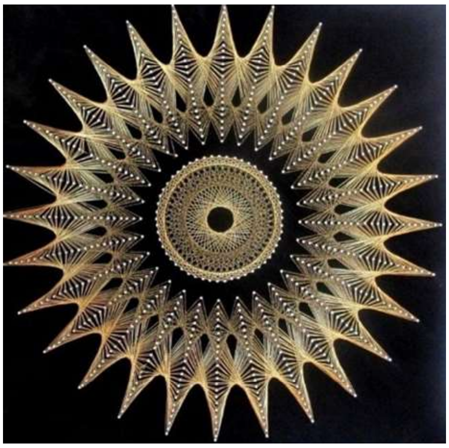
Már a szabályos ötszög-csillagötszög végtelenségig folytatott ábráján is megjelenik a fraktálok fogalma. Ha itt ugyanazt a helyettesítést végtelen sokszor végrehajtanánk, akkor itt is fraktál szerkezetű rendszerét kapnánk a sorozatoknak.

- További szigorításként keressünk olyan csupa **2-nél nagyobb**, különböző differenciájú számtani sorozatot, amelyek együttesen tartalmazzák az összes természetes számot. Ilyen is létezik. Egy ilyennek megtalálását az olvasóra bízzuk.
- Lehet-e a legkisebb differencia tetszőlegesen nagy?
  Nos, megérkeztünk az előkészített problémához. Ezt a kérdést Erdős Pál az 1950-es években vetette föl. Sok kutatás és részeredmény után 2013-ban érkezett rá nemleges válasz. Ugyanakkor vannak még máig nyitott kérdések a problémával kapcsolatban. Például egy ilyen:
- Lehet-e minden differencia 1-nél nagyobb páratlan szám, ha csak véges sok számtani sorozat állhat a rendelkezésünkre?

A lefedőrendszerek problémája Erdős Pál világhírű matematikus egyik legkedvesebb kutatási területe volt. A kérdéseket természetesen maradékosztályok és kongruenciarendszerek segítségével talán gyakrabban fogalmazzák meg a kutatók.

Megjegyzés: Egy kicsit még a számelmélet, relatív prímség kézzel foghatóvá tételéhez kapcsolódó példát említenék. Talán többen vagyunk, akik játszottunk gyerekkorunkban hungarocell táblába szúrt rajzszögekre tekert cérnákkal. Ma már rengeteg szabályos és nem szabályos, ugyanakkor szép ábrákat megjelenítő cérnakép létezik. Ezek közül a játszó figyelmét tanárként talán érdemes olyan irányba terelnünk, ahol a relatív prímek fogalmát vagy akár az Euler-féle φ-függvényt könnyedén megismerheti. Ezek a gyakorlatok az n-edik komplex egységgyökök fogalmát és bizonyos egyszerűbb összefüggéseit is magukban rejtik.

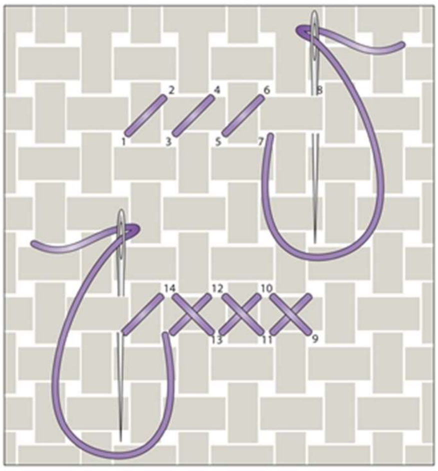
Ehhez például egy szabályos 24-szög csúcsaiba szúrjunk gombostűket, és válasszunk egy tetszőleges számot, ami kisebb 24-nél. Valamelyik tűtől kiindulva minden ennyiedik tűt kerüljük meg feszesen tartva a cérnát, majd tegyük ugyanezt a továbbiakban is. Itt is le lehet jegyezni a tapasztaltakat. Kiderül, hogy a cérna csakis abban az esetben fogja az összes gombostűt érinteni, ha a tetszőlegesen választott szám és a 24 relatív prím. Pihentetőül álljon itt néhány cérnakép!


Új szelek – Kreatív matech verseny

A digitális kompetenciákat és a logikát is megmozgató új matematika versenyt szervezett az idén először a KLIK és a Dunaújvárosi egyetem. A versenyen 10. és 11. osztályos diákokból álló csapatok indulhatnak. A verseny feladatanyagának összeállításában is módunk volt segítséget nyújtani fiatal kolléganőmmel (Somogyi Anikóval). Tőle származik az alábbi példa, amelyet az országos döntőben választható feladatként ki is tűzött a szakmai zsüri.

A keresztszemes hímzés készítésekor ún. x öltéseket alkalmazunk. Négyzetekből (pixelekből) álló mintákat lehet ilyen technikával kihímezni. Egy db négyzet kitöltésekor először a négyzet bal alsó sarkát és a jobb felső sarkát kötjük össze egy öltéssel (nevezzük első átlós öltésnek), ezután az anyag hátulján függőlegesen öltünk, és végül a négyzet jobb alsó sarkát a bal felső sarkával kötjük össze egy öltéssel (második átlós öltés).



Az egy sorban lévő négyzeteket úgy érdemes kihímezni, hogy először csak az első átlós öltéseket készítjük el a sorban, majd „visszafordulva" a másodikat.

Az így kihímzett sor „fonák oldala" is szabályos, hiszen csak függőleges öltéseket tartalmaz.

Természetesen azt is meg lehet tenni, hogy először a másodiknak nevezett félátlót készítjük el, és az anyag elülső oldalán a tűt a fonál alatt átbújtatva utólag készítjük el az első átlós öltést.

Szabályos az az algoritmus, amelyiknél

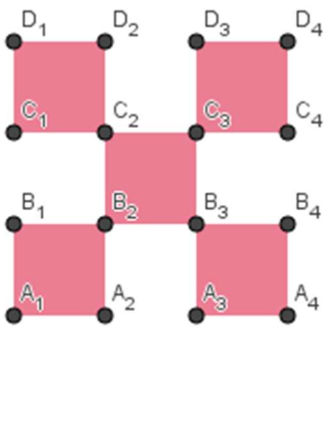
- nem kell fonalat elvágni

- minden négyzet szabályos x-szel van kihímezve (minden átlós öltés egyszeres)

- az anyag hátoldalán szigorúan függőleges öltések vannak (ezek az öltések ismételhetők)

- mindig szomszédos lyukba öltünk (elöl átlósan, hátul fel vagy le). Nem megengedettek a „hosszabb" öltések.

- megengedjük a 2 átlós félöltés tetszőleges sorrendjét.



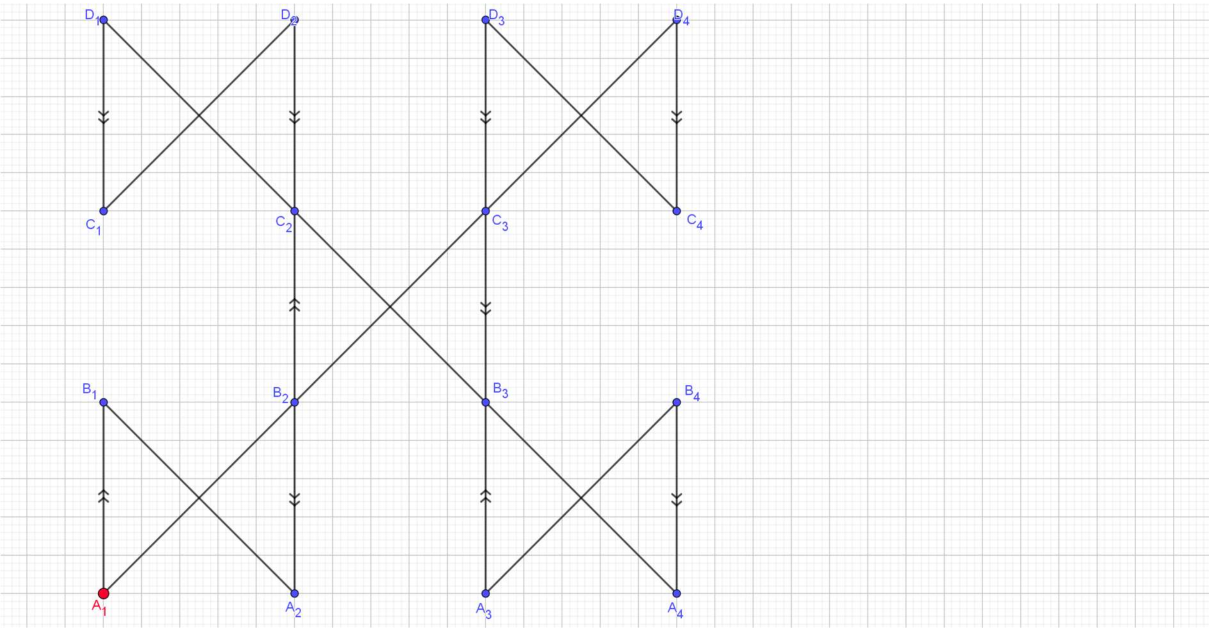
Feladat: Készítsetek algoritmust a X betű kihímzésére az alábbi minta szerint! Kezdjétek az A_1 pontnál!

Az algoritmusotokat szemléltessétek képekkel (a hímzés elülső, hátulsó oldala). **Segítségül használhatjátok a keresztszemes_X_üres.ggb című fájlt!**

Írjátok le a fentihez hasonló módon a lépések (öltések) sorozatát!

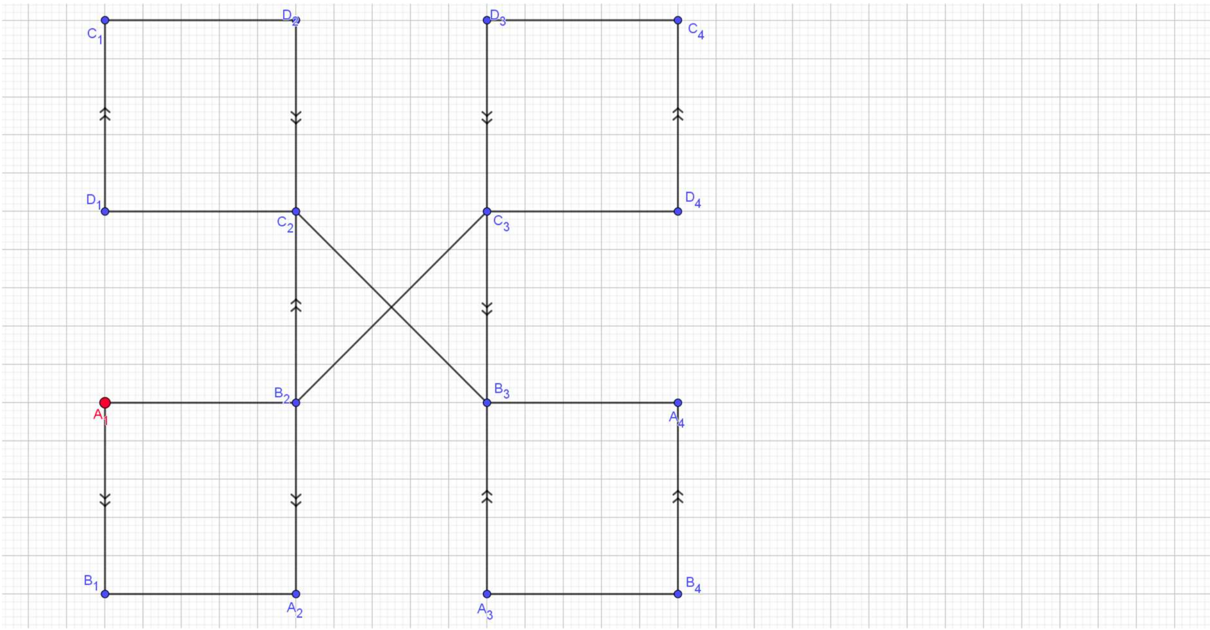
A feladatot (talán hosszabb szövegezése miatt) egyik döntőbe jutott csapat sem választotta. Nézzük meg közelebbről, valóban olyan nehéz-e a probléma!

Készítsünk hozzá egy modellt! Az ábrán az átlós vonalak a kézimunka elején, a nyíllal ellátott szakaszok a valóságban a kézimunka visszáján haladnak.

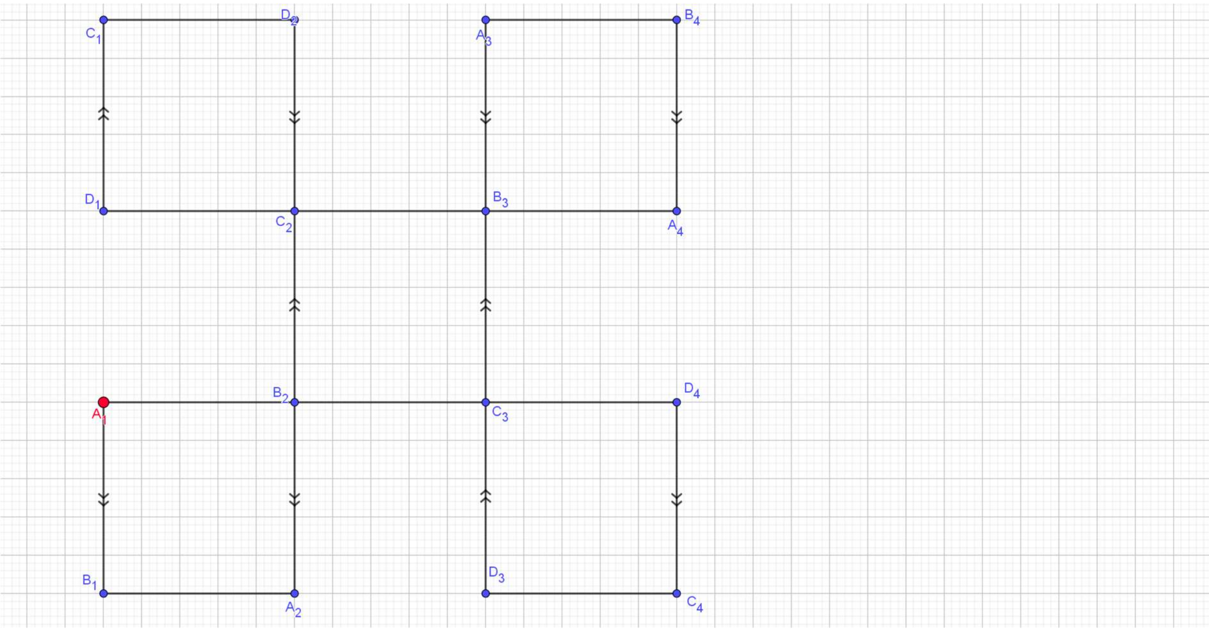


A nyilak iránya most nem mérvadó.

Ha meg tudjuk fogalmazni, mitől tűnik bonyolultnak az ábra, akkor lehet, hogy képesek vagyunk arra is, hogy egyszerűbbé tegyük. Engem némiképp zavart a sok „fölösleges" kereszteződés az ábrán. Az „ugrott be", hogy pl az A_1 és B_1 pont megcserélésével (úgy, hogy közben minden mást változatlanul hagyunk az ábrán) eggyel kevesebb helyen metszenék egymást „fölöslegesen" a megrajzolt vonalak. Majd ugyanezt a másik három sarki mezőben is megtehetjük. Így végül csak egyetlen kereszteződés marad, ahol nem a tűszúrás helyén találkoznak fonalak: az ábra közepén.



Tekintsük most az egész ábra „jobb oldali felét”, és azzal is hajtsuk végre ugyanezt a forgatást (tükrözést.)

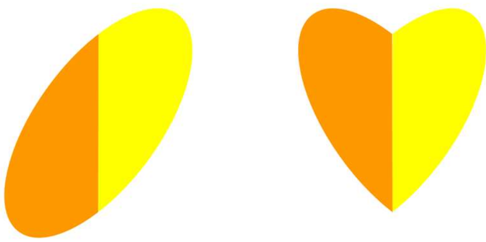


Az ábra így már végig járható váltakozva vízszintes (eredetileg átlós, tehát a munka színén haladó) és függőleges (a munka hátulján haladó) szakaszokon.

Ha ennek a matematikai hátterét is meg akarjuk nézni: itt egy gráffal modelleztük a keresztszemes hímzés egymás utáni lépéseit, amit először a jobb láthatóság kedvéért megpróbáltunk síkba rajzolható gráfként látni, majd ennek a gráfnak az egy vonallal való lerajzolását akartuk megvalósítani, azaz találni egy A_1 –ből induló Euler vonalat. Mivel itt minden pont fokszáma páros (a gráf összefüggő), így a keresett Euler-vonal létezik, és ugyanott fog végződni, ahonnan elindítottuk.

Egy bűvésztrükk

Egy alkalommal módomban állt közelről megnézni egy bűvész néhány trükkjét. Volt közöttük egy olyan, ami kimondottan bosszantott volna, ha nem jövök rá a trükk nyitjára.



Két kis – az ábrán látható formájú és színű - nyitható-csukható doboz közül az egyiknek (az ellipszis alakúnak) az egyik felébe beletett a mester egy kavicsot. A másikat (a szív alakút) alaposan átnéztem, teljesen üres volt. Majd külön-külön beletette ezeket egy-egy hálóba. Végül néhány varázsige mormolása közben hadonászott kicsit a hálókkal. Természetesen, amikor elővette a hálókból a dobozokat, az ellipszis alakú teljesen üres volt, a szív alakúban pedig ott gurgulázott a kavics. Az teljesen lehetetlen lett volna, hogy az egyik hálóból átmenjen a másikba akármelyik doboz is. Máshol kellett keresni a trükk lényegét.

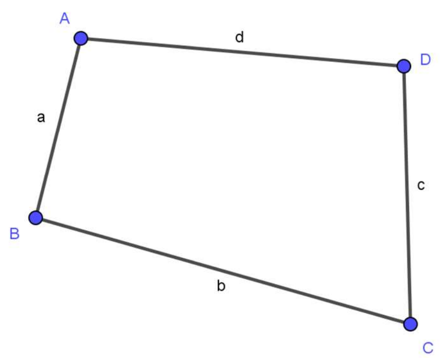
Mindkét doboz el volt vágva középen, ahol a színek is találkoznak, és a vágásvonalra merőleges tengely körül mindkettőt el lehetett forgatni. Így az ellipszis alakú dobozból a háló belsejében szív alakút csinált, a szív alakúból pedig ellipszis alakút. A kavics tehát természetesen ugyanabban a rekeszben maradt végig, ahová az elején helyezte. A dobozok formáját sikerült megváltoztatnia. Rájöttem! (Mivel igen ügyes volt a bűvész, így egyáltalán nem vettem észre a cselt, szóval tényleg ki kellett találnom!)

Ez bizony komoly matematika volt. Ugyanakkor vegyük észre, hogy az előző, keresztszemes feladat megoldásának a trükkje ugyanez volt. Vagyis ettől vált átláthatóbbá az ábra, hogy utána az Euler-vonal keresésére tudjunk fókuszálni. Ha nem találkoztam volna ezzel a bűvésztrükkel kb. 30 évvel korábban, akkor valószínűleg a keresztszemes feladatnál sem „ugrott volna be” a technika, vagy csak jóval nehezebben.

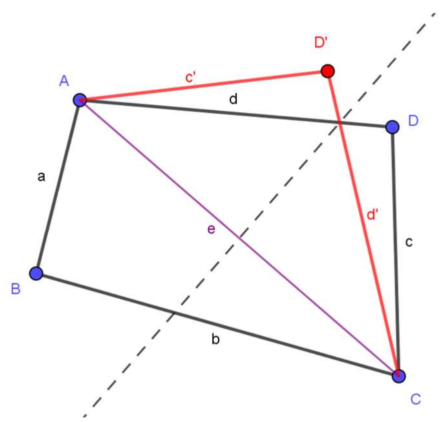
Ugyanennek a gondolatnak, trükknek egy versenyfeladat megoldása során is jó hasznát vettem.

A bűvésztrükk utóélete

Az *ABCD* négyszög oldalai rendre *a*, *b*, *c*, *d*. Bizonyítsuk be, hogy $a \cdot c + b \cdot d \geq 2T$, ahol *T* a négyszög területe.



Ismét föltehetjük a kérdést, mi zavar a feladatban? Talán kézenfekvő a válasz, hogy a területek kiszámításakor gyakran jobban szeretjük az egymáshoz csatlakozó szakaszokat, mint az egymástól távolabb lévőket. Az előző bűvésztrükk megismétlése tehát szinte kínálja magát.



Tükrözzük az átlójával kettévágott négyszögnek csak az egyik részét, az *ACD* háromszöget az *AC* átló felezőmerőlegesére. Az így keletkező *ABCD’* négyszögben már egymás mellett szerepel az *a* és a *c*, illetve a *b* és a *d* oldal is. Ezután könnyen látható, hogy $a \cdot c' = a \cdot c \geq 2 \cdot T_{ABD'}$ és $b \cdot d' = b \cdot d \geq 2 \cdot T_{CBD'}$. Ezek összeadásával pedig éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

A fogalomalkotást sokszor igencsak meg tudja könnyíteni egy játék, ami nagyon magvas gondolatokat, ötletet tud tartalmazni. Az idejében elvetett mag (jó talajba érkezve) a kellő pillanatban tud hajtásokat hozni. A játékok, cérnaképek készítése, bűvésztrükk-fejtés, stb. közben a következő témákat érintettük.

Érintett témák:

- Kombinatorika, valószínűségszámítás, geometria, modern algebra, esetleg algebra, számelmélet
- Ciklikus csoport, csoport, kommutatív, asszociatív, zéruselem, egységelem, a művelet fogalmi bővítése
- Kombinációk, a rosszak is befolyásolják az eredményt, hipergeometrikus eloszlás
- Aranymetszés, egybevágóság, hasonlóság, területek aránya
- Oszthatóság, maradékok, legkisebb közös többszörös, számtani sorozatok, periodikus sorozatok, relatív prímek, kongruenciák, lefedő rendszerek, napi tudomány, 2013-as eredmény, nyitott kérdés
- Gráfok, modellalkotás, Euler-vonal